MATH-131, *Probabilités et Statistique*

Examen blanc

Livret des questions

Juin 2018

Emeric Thibaud

Instructions: Le temps alloué pour l'examen est de 180 minutes. Veuillez écrire vos réponses sur le livret de réponses fourni avec ce livret de questions. Une calculatrice non programmable est autorisée, tout autre document est interdit.

La distribution des points est indiquée pour chaque exercice et chaque question. Toute réponse doit être justifiée. Tout résultat du formulaire peut être utilisé sans preuve, mais vous devez citer ce résultat de manière appropriée.

A la fin de l'examen, les deux livrets (réponses et questions) doivent être rendus. Seul le livret de réponses sera corrigé.

Prénom :

Nom de famille :

Sciper:

Exercice	Points	Max
1		40
2		20
3		20
4		20
Total:		100

Question 1. **Questions de cours** .... *40 points*

(a) Soit $x_1, \dots, x_n$ un échantillon de n nombres réels. Soit a et b deux nombres réels. Exprimez la variance empirique $\widetilde{S}^2$ de l'échantillon $\widetilde{x}_1 = a + bx_1, \dots, \widetilde{x}_n = a + bx_n$ en fonction de la variance empirique S^2 des $x_1, \dots, x_n$. [4]

(b) Expliquez pourquoi on divise par "$n-1$" et non pas par "n" dans l'expression de S^2. [2]

(c) La table suivante définit-elle une fonction de masse valide pour une variable aléatoire discrète ? [2]

x	1	2	3	5	10	20
$f(x)$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1

(d) Soit $X \sim \mathrm{Unif}(-2, 3)$. Calculez la fonction de répartition de X. [2]

(e) Soit $X \sim \mathrm{Unif}(-2, 3)$. Quelle est la distribution de la variable aléatoire $Y = 2X$? [4]

(f) Si $X \sim \mathcal{N}(5, 10^2)$, calculez $\Pr(X \leq 3)$. [4]

(g) Si on lance 5 dés 100 fois de suite, quelle est la probabilité d'avoir obtenu qu'au moins un lancé ait donné 5 faces identiques ? [4]

(h) Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus. Sur un échantillon de 25 réalisations de X on a obtenus les statistiques suivantes : $\bar{x} = 10$, $S = 2$. Donnez un intervalle de confiance à 95% pour μ. [6]

(i) Si $\Pr(B) = 0.2$, $\Pr(A \mid B) = 0.5$ et $\Pr(A \mid B^c) = 0.3$, que vaut $\Pr(A)$? [2]

(j) Expliquez pourquoi on peut approximer une loi Binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ par une loi normale quand m est grand ? [2]

(k) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité conjointe [4]

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

(l) Si un test du chi-deux basé sur $k = 8$ classes retourne une valeur $t_{\text{obs}} = 14$, acceptez-vous l'hypothèse H_0 pour $\alpha = 10\%$? [4]

Question 2. **Déséquilibre d'une pièce** .... *20 points*

On aimerait tester si une pièce de monnaie est déséquilibré. Pour cela on lance la pièce 1000 fois. On a obtenu 550 fois "pile". Que pouvez-vous conclure ?

Question 3. **Test médical** .... *20 points*

Un étudiant vivant en Suisse va chez le médecin, et il est alors choisi au hasard pour un test de la grippe porcine. On sait que cette maladie concerne actuellement une personne sur 10000 en Suisse. La probabilité que le test soit positif alors que la personne testée n'a pas la grippe porcine est de 1%. Si la personne est malade, le test est toujours positif.

(a) Si l'étudiant est testé positif, quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? [16]

(b) On sait maintenant que l'étudiant est revenu du Mexique il y a quelques jours et que 1 personne sur 200 ayant visité le Mexique récemment a contracté cette maladie là-bas. La probabilité que l'étudiant ait la grippe porcine change-t-elle avec cette information ? Si oui, calculez la nouvelle probabilité. [4]

Question 4. **Loi géométrique et maximum de vraisemblance** .... *20 points*

Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$ si

$$\Pr(X = i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}.$$

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon tiré de la loi de X. Nous cherchons à estimer le paramètre p.

(a) On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. Expliquez pourquoi X suit une loi géométrique. [4]

(b) Dérivez l'expression de $\widehat{p}_{\text{ML}}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de p. [10]

(c) Dérivez la loi approximative de $\widehat{p}_{\text{ML}}$ quand n est grand. [6]